Corso di laurea in Matematica - Anno Accademico 2013/2014

AM110 - Analisi Matematica 1- Tutorato II

Docente: Prof. Pierpaolo Esposito

Tutori: A. Mazzoccoli, M. Nanni

SOLUZIONI

Esercizio 1.

$\circ\mathbb{R}$: Una soluzione semplice usando il fatto che $\mathbb{R}^c$ è il vuoto, che per definizione è aperto, dunque $\mathbb{R}$ è chiuso. Inoltre tutti i punti di $\mathbb{R}$ sono interni, dunque per definizione $\mathbb{R}$ è anche aperto.

$\circ\mathbb{Q}$: Preso $x \in \mathbb{Q}$ e considerato un suo intorno $I(x,r)$ con $r > 0$, osservo che $\mathbb{Q}$ è un insieme bucato, cioè tra due razionali c'è sempre almeno un numero reale. Ne segue che $\forall x \in \mathbb{Q}$, $I(x,r) \nsubseteq \mathbb{Q}$. Dunque $\mathbb{Q}$ non è aperto, poiché $\text{Int}(\mathbb{Q}) = \varnothing$. Il suo complementare $\mathbb{Q}^c$ si può scrivere come $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Per la densità di $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, tra due reali c'è sempre un razionale, e dunque, come $\mathbb{Q}$, anche questo è un insieme bucato e non può essere aperto. Ne segue che $\mathbb{Q}$ non è neanche chiuso.

$\circ\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: Per quanto visto nel punto precedente l'insieme non è né aperto né chiuso.

$\circ\mathbb{Z}$: Questo è un insieme discreto. Consideriamo $x \in \mathbb{Z}$ e un suo intorno $I(x,r)$ con $r > 0$. Questo intorno interseca sicuramente $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Z}$, di conseguenza $\forall x \in \mathbb{Z}$, $I(x,r) \nsubseteq \mathbb{Z}$. Per cui $\text{Int}(\mathbb{Z}) = \varnothing$ e $\mathbb{Z}$ non è aperto. Ora considerando $\mathbb{Z}^c$ che posso scrivere anche come $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$, osservo che è unione di sottoinsiemi aperti di $\mathbb{R}$ del tipo $(n, n+1)$ con $n \in \mathbb{Z}$. Dunque è aperto e allora per definizione $\mathbb{Z}$ è chiuso.

$\circ\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$: Per quanto visto nel punto precedente, l'insieme considerato è unione di aperti di $\mathbb{R}$, per cui è un aperto.

$\circ A = \{1,2,3,4,5\}$: È un insieme discreto per cui si può ripetere lo stesso ragionamento seguito per $\mathbb{Z}$, che porta alla conclusione che A è chiuso, ma non aperto.

$\circ B = [1,+\infty)$: Osserviamo che non riusciamo a trovare un intorno di 1 tutto contenuto all'interno di B. Infatti $\forall r > 0$ il semi intorno $(1-r, 1) \nsubseteq B$ e dunque $\nexists r > 0$ t.c. $I(1,r) \subseteq B$. Per cui l'insieme non è aperto. Il suo complementare $(-\infty, 1)$ è un aperto di $\mathbb{R}$, quindi B è per definizione chiuso.

$\circ C = (-1,0) \cup (1,+\infty)$: Sappiamo che unione di aperti di $\mathbb{R}$ è ancora un aperto di $\mathbb{R}$, dunque C è aperto.

$\circ D = (-3,2] \cap [1,4)$: Riscriviamo D come $[1,2]$, un intervallo chiuso e limitato di $\mathbb{R}$, che è per definizione chiuso.

$\circ E = \left\{x \in \mathbb{R} : x^2 > \sqrt{2}\right\}$: Risolviamo la disequazione e riscriviamo E come $(-\infty, \sqrt[4]{2}) \cup (\sqrt[4]{2}, +\infty)$ unione di aperti di $\mathbb{R}$ e dunque aperto.

Esercizio 2.

$\circ A = (0,1)$: A è un aperto, quindi per definizione $Int(A) = A$. La chiusura, sempre per definizione, è il più piccolo chiuso contenente A, è $[0,1]$.

$\circ B = [0,1)$: Possiamo ripetere il ragionamento compiuto per l'insieme B dell'esercizio 1 e non riuscendo a trovare un intorno di 0 tutto contenuto in $[0,1)$ possiamo concludere che $Int(B) = (0,1)$. La chiusura, come per A, è proprio $[0,1]$.

$\circ C = [7, +\infty)$: Ancora una volta non riusciamo a trovare un intorno di 7 tutto contenuto in C, dunque $Int(C) = (7, +\infty)$. Inoltre, poiché C è chiuso $\bar{C} = C$.

$\circ D = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \leqslant 3\}$: Risolviamo la disequazione e riscriviamo D come $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. L'interno è $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ per quanto visto precedentemente. Essendo poi D chiuso, abbiamo ancora $\bar{D} = D$.

$\circ E = \{3,4,5,6,7\}$: Per quanto visto nel primo esercizio E è chiuso, dunque la sua chiusura è lui stesso. Come per $\mathbb{Z}$, qualsiasi intorno di ogni suo punto interseca il suo complementare. Ne segue che $Int(E) = \varnothing$.

$\circ F = (0,1) \cup (\mathbb{Q} \cap (1,2))$: Per il membro destro dell'inclusione si può richiamare quanto visto per $\mathbb{Q}$ in $\mathbb{R}$, dunque non ha punti interni. Allora $Int(F) = (0,1)$. Per la chiusura, utilizziamo il fatto che l'insieme dei punti di accumulazione del membro destro è $[1,2]$. Dunque $\bar{F} = [0,2]$.

$\circ G = \left\{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}^*\right\}$: I punti della successione sono isolati, e dunque G non ha punti interni. Osserviamo poi che G ha un punto d'accumulazione in 0 (lo si verifica con la definizione). Ne segue subito che $\bar{G} = G \cup \{0\}$.

<u>Esercizio 3.</u>

$\circ A = \left\{\sqrt{1-x^2} : -1 \leqslant x \leqslant 1\right\}$ Provando semplicemente che $\sqrt{1-x^2} \geqslant 0$ e che $\sqrt{1-x^2} \leqslant 1$ $\forall x \in [-1,1]$, si deduce che l'insieme ammette Min in 0 e Max in 1.

$\circ B = \left\{\frac{xy}{x+y} : x, y \in (0,1)\right\}$: L'insieme ammette un Inf in 0: dopo aver provato che 0 è un minorante si prova che esso è il più grande minorante se vale $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon, y_\varepsilon$ t.c. $\frac{xy}{x+y} < \varepsilon$, disequazione che si può riscrivere come $x < \frac{y\varepsilon}{y-\varepsilon}$ verificata perché prendendo comunque ε piccolo a piacere posso scegliere x molto vicina a 0 e y molto vicina a 1 per soddisfare la disequazione. Allo stesso modo l'insieme ammette un Sup in 1/2: dopo aver provato che 1/2 è un maggiorante, proviamo che esso è il più piccolo maggiorante. Dunque vediamo che $\forall \varepsilon > 0\ \exists x_\varepsilon, y_\varepsilon$ t.c. $\frac{xy}{x+y} > \frac{1}{2} - \varepsilon$ che si può riscrivere come $x > \frac{(1/2-\varepsilon)y}{2y+2\varepsilon-1}$, infatti per ε piccolo a piacere basta scegliere y vicina a 0 per avere un segno negativo al membro destro. Poiché x deve essere per forza un numero positivo, la sua scelta è libera e soddisfa sempre la disequazione.

$$\circ C = \{a_n : n \in \mathbb{N}^*\}, \quad a_n = \begin{cases} sen(log(n^4)) & \sqrt{n} \in \mathbb{N}^* \\ -n^2 + n & n = p \quad primo \\ 2(-1)^n & altrimenti \end{cases}$$

$sen(log(n^4))$ oscilla tra -1 e 1, $-n^2+n$ assume valori negativi sempre più grandi in modulo $\forall n$ e $2(-1)^n$ oscilla tra 2 e -2. Ne segue ovviamente che C non è inferiormente limitato ma ammette Max in 2.

<u>Esercizio 4.</u> $\circ$ Ogni insieme di n elementi ha 2^n sottoinsiemi.

La base dell'induzione si prova per insiemi con un unico elemento, aventi come sottoinsiemi tutto l'insieme e il vuoto. Ora prendiamo un insieme con n elementi E_n e sia $E_{n+1} = E_n \cup \{z\}$ (con $z \notin E_n$). Dividiamo i sottoinsiemi di E_{n+1} in due famiglie, quella dei sottoinsiemi di E_{n+1} che contengono z e quella dei sottoinsiemi che non lo contengono. La prima famiglia è costituita da tutti i sottoinsiemi di E_n che, usando il passo induttivo, sono proprio 2^n. A questo punto ogni insieme della prima famiglia può essere costruito unendo z con un insieme della seconda famiglia; si avrebbero così altri 2^n insiemi. Sommando il tutto: $2^n + 2^n = 2^{n+1}$.

$\circ \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n}$:

-Base induttiva per $n = 1$: $\frac{1}{2^1} = 1/2$ e $2 - \frac{1+2}{2^1} = 1/2$ OK.

-Passo induttivo assumendo vera la proprietà per n e provandola per $n+1$:

$$\circ \sum_{k=1}^{n+1} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} = \circ \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{2^k} = 2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} =_{passo}$$

$$2 - \frac{n+2}{2^n} + \frac{n+1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{2n+4-n-1}{2^{n+1}} = 2 - \frac{(n+1)+2}{2^{n+1}}$$

$\circ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{n}{2n+1}$:

-Base induttiva per $n = 1$: $\frac{1}{4 \cdot 1 - 1} = 1/3$ e $\frac{1}{2+1}$ OK.

-Passo induttivo assumendo vera la proprietà per n e provandola per $n+1$:

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{4k^2-1} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} + \frac{1}{4n^2+8n+3} =_{passo} \frac{n}{2n+1} + \frac{1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{2n^2+3n+1}{(2n+1)(2n+3)} = \frac{n+1}{2n+3}$$

<u>Esercizio 5.</u>

Considerati x e $y \in \mathbb{R}$, basta scegliere $I(x,r)$ e $I(y,r)$ con $r < \frac{|x-y|}{2}$, due intorni e quindi due insiemi aperti, che soddisfano sempre la definizione.

<u>Esercizio 6.</u>

$\Leftarrow$: Se $F = \bar{F}$ allora F è chiuso perché $\bar{F}$ è chiuso.

$\Rightarrow$: Viceversa se F è chiuso, $F \subset \bar{F}$ ma è anche vero che $\bar{F} \subset F$ perché $\bar{F}$ è contenuto in ogni chiuso contenente F e quindi, in particolare, anche in F.

<u>Esercizio 7.</u>

Siano A il primo membro e B il secondo membro dell'uguaglianza. Se $x \in A$, allora $x \notin \bigcup_\alpha E_\alpha$ e quindi $x \notin E_\alpha$ per ogni α, di conseguenza, sempre per ogni α, $x \in E_\alpha^c$, ovvero $x \in \bigcap_\alpha E_\alpha^c$. Procedendo a ritroso nello stesso modo si ottiene l'inclusione inversa e si prova completamente l'asserto.

<u>Esercizio 8.</u>

Svolgendo i calcoli otteniamo $n > 10^6 \cdot 25 - \frac{1}{2}$. Il primo naturale N disponibile è quindi $10^6 \cdot 25 - 1$.

ESERCIZIO 9.

Si procede studiando le soluzioni della disequazione in modulo $|x+1|+|x| \leqslant 2$, risolvendo i tre sistemi che descrivono i tre possibili casi:

$$\begin{cases} x \geqslant 0 \\ \\ \dfrac{2}{x} + 1 \leqslant 2 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} -1 \leqslant x < 0 \\ \\ 1 \leqslant 2 \end{cases} \quad \bigcup \quad \begin{cases} x < -1 \\ \\ 2x + 1 \geqslant 2 \end{cases}$$

Unendo le soluzioni otteniamo l'intervallo chiuso e limitato $[-3/2, 1/2]$, disegnabile senza problemi.